

## Artículo de investigación

Cómo citar: E. González *et al.*, "Estado del arte del problema de ruteo de vehículos con componentes estocásticos", *Inventum*, 2018, vol. 13, no. 24, pp. 2-14, enero - junio, 2018. doi: 10.26620/uniminuto.inventum.13.24.2018.2-14

Editorial: Corporación Universitaria Minuto de Dios – UNIMINUTO.

Recibido: 11 de enero de 2018

Aceptado: 18 de febrero de 2018

Publicado: 2 de abril de 2018

**Conflicto de intereses:** los autores han declarado que no existen intereses en competencia.

# ESTADO DEL ARTE DEL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS CON COMPONENTES ESTOCÁSTICOS

## THE STOCHASTICS VEHICLE ROUTING PROBLEM: STATE OF THE ART

## ESTADO DA ARTE DO PROBLEMA DO ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM COMPONENTES ESTOCÁSTICOS

Elsa Cristina González La Rotta; Oswaldo González Yazo;  
Mauricio Becerra Fernández

### Resumen

Este artículo presenta una revisión a la literatura del problema de ruteo de vehículos con componentes aleatorios: SVRP (Stochastics Vehicle Routing Problem). A pesar de la atención reciente hacia los problemas de ruteo y la variedad de estudios al respecto, con este trabajo se pretende enfatizar en una tipología especial, la cual presenta uno o múltiples parámetros de carácter probabilístico o estocástico. Después de una búsqueda rigurosa en las bases de datos Science Direct, EBSCO y Google Scholar, utilizando una ventana de tiempo de los últimos diez años y clasificando dichas investigaciones, se logra establecer un concepto particular para este tipo de problemas de ruteo, sus clasificaciones y métodos de solución, lo cual resulta de gran ayuda para quienes desean investigar el tema, pues facilita la indagación acerca de enfoques de modelamiento y métodos de solución. Como conclusión principal, se determina que, debido a la complejidad de su solución, son menos los resultados y aplicaciones que contemplen este tipo de formulaciones, con respecto a las que presentan parámetros deterministas; ofreciendo un amplio campo de trabajo para trabajos posteriores.

**Palabras clave:** Problema de ruteo de vehículos, problema de ruteo estocástico, demanda aleatoria, distribución, transporte.

### Abstract

This article presents a literature review of the Stochastic Vehicle Routing Problem SVRP. Despite the recent attention to the problems of routing and the existing variety of studies in this regard, in this research we emphasize a special typology, which account for one or multiple parameters of a probabilistic or stochastic nature. The rigorous revision of the state of the art was conducted using SCIENCE DIRECT, EBSCO and GOOGLE SCHOLAR databases. Considering a time window of the last 10 years, and classifying the results, allowed us to establish a particular conceptualization for this types of routing problems, their classifications and solution methods. This constitutes a tool of great help for those researching on the subject, as it facilitates the understanding of the modelling approaches and solution methods. As a main conclusion, due to the complexity of SVRP solutions,

Elsa Cristina González La Rotta  
ecgonzalez@ucatolica.edu.co  
Universidad Católica de Colombia

Oswaldo González Yazo  
ogonzalez@ucatolica.edu.co  
Universidad Católica de Colombia

Mauricio Becerra Fernández  
mbecerra@ucatolica.edu.co y  
mauriciobecerrafernandez@gmail.com  
Universidad Católica de Colombia

Copyright:



there are less results and applications that contemplate this type of formulations, as opposed to those contemplating deterministic parameters. Offering a wide field for future research in the field.

**Keywords:** Vehicle routing problem, stochastic routing problem, random demand, distribution, transport.

**Resumo:**

Este artigo apresenta uma revisão à literatura do problema do roteamento de veículos com componentes aleatórios: SVRP (Stochastics Vehicle Routing Problem). Apesar da atenção recente para os problemas de roteamento e a variedade de estudos ao respeito, com este trabalho pretende-se enfatizar numa tipologia especial, a qual apresenta um ou múltiplos parâmetros de carácter probabilístico ou estocástico. Após uma busca rigorosa nos bancos de dados Science Direct, Ebsco e Google Scholar, utilizando uma janela de tempo dos últimos 10 anos e classificando ditas investigações, consegue-se estabelecer um conceito particular para este tipo de problemas de roteamento, suas classificações e métodos de solução, o qual resulta de grande ajuda para quem desejam pesquisar o tema, pois facilita a indagação a respeito de enfoques de modelagem e métodos de solução, são menos os resultados e aplicativos que contemplem este tipo de formulações, com respeito às que apresentam parâmetros deterministas; oferecendo um amplo campo de trabalho para trabalhos posteriores.

**Palavras-chave:** Problema do roteamento de veículos, problema do roteamento estocástico, demanda aleatória, distribuição, transporte.

## INTRODUCCIÓN

Diseñar rutas para distribuir o recoger mercancías desde uno o varios depósitos hasta varios puntos de consumo con una demanda asociada, ubicados en un plano euclidiano, recibe el nombre de *Problema de ruteo de vehículos* o *VRP (Vehicle Routing Problem)*. El *VRP* ha tenido un desarrollo importante a partir de su formulación en la segunda mitad de los años cincuenta; tanto, que hoy existe una gran variedad de clases del mismo, de acuerdo con las variaciones de los componentes básicos de un problema estándar, que son clientes, depósitos y flota de vehículos.

Los problemas con componentes estocásticos, tales como demanda aleatoria, tiempos estocásticos o clientes con probabilidades asociadas, son de más reciente interés. Esto se debe a la complejidad de los métodos de solución, en la medida en que este tipo de formulaciones no son susceptibles de ser optimizadas; pero sí es posible combinar o hibridar diferentes algoritmos a fin de establecer buenas soluciones aproximadas.

En la realidad del transporte y la logística, las demandas no son deterministas, estas sufren variaciones en diferentes factores que no son controlables. Por ejemplo, los tiempos de desplazamiento en grandes ciudades dependen, en gran parte, del estado del tráfico, el cual tiende a cambiar de manera estocástica; la presencia o ausencia de clientes puede ser representada mediante una distribución discreta de probabilidad. Este tipo de combinaciones de variación generan una mayor complejidad de modelamiento y solución.

En este sentido, este estado del arte pretende contribuir a delimitar la búsqueda de información de investigadores interesados en este campo, así como a reducir los tiempos de dicha búsqueda.

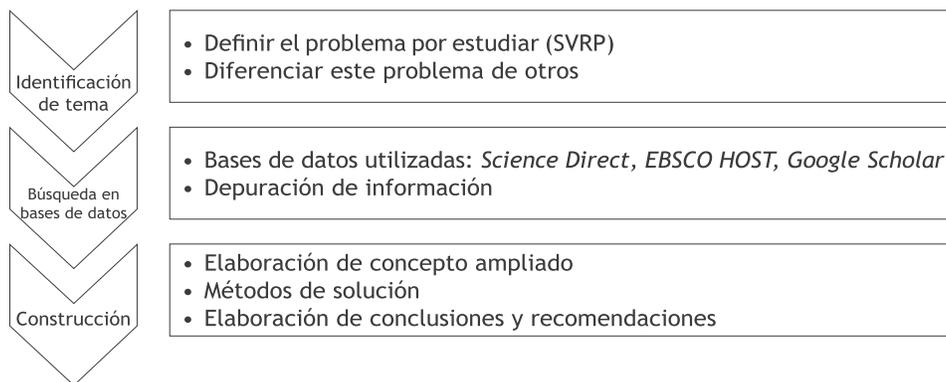
Este documento está organizado de la manera siguiente: 1) se expone la metodología empleada para la consulta en las bases de datos *Science Direct*, *EBSCO* y *Google Scholar*; 2) se plantea una formulación matemática del problema de *SVRP*; 3) se plantea una clasificación o taxonomía, de acuerdo con los componentes y parámetros de diferentes tipos de *SVRP*; 4) se establece el origen de estas aplicaciones; 5) se propone una clasificación, de acuerdo con los componentes esenciales, tales como la demanda, la presencia-ausencia de clientes y los tiempos de servicio y recorrido; 6) se abordan los diferentes métodos de solución propuestos; 7) se presentan las conclusiones.

Como elemento de reflexión, se hace énfasis en que aún hay muchas líneas de investigación posibles en este campo de la logística y el transporte; tal es el caso de aplicaciones en la industria de productos perecederos y artículos con demandas desconocidas.

## METODOLOGÍA

En primer lugar, el presente estado del arte definió el problema por investigar y determinó que hay un especial interés en los modelos de *VRP*. Dada la cantidad de literatura asociada a dicho problema, se buscó delimitar y abordar el *SVRP*. Posteriormente, en bases de datos científicas (*Science Direct*, *EBSCO* y *Google Scholar*), se utilizaron, como algoritmo de búsqueda, las palabras *Stochastics Vehicle Routing Problem*. Una vez realizado lo anterior, se procedió a depurar la información y establecer una ventana de tiempo de los últimos diez años. Se identificó el concepto de *SVRP*, sus clasificaciones, los métodos de solución empleados y, finalmente, una vez se realizó el estado del arte, se propusieron las conclusiones y las recomendaciones (véase figura 1).

Figura 1. Metodología de construcción del estado del arte



Fuente: elaboración propia.

## Formulación del problema de ruteo de vehículos con componentes estocásticos

El VRP estocástico se define con un grafo completo:  $G=(V,A,D)$ , donde  $V=\{0,1,\dots,n\}$  es un conjunto de nodos (clientes, proveedores, etc.), con el nodo 0 denotando el depósito;  $A=\{(i,j):i,j \in V,i \neq j\}$  es el conjunto de arcos que unen los nodos; y  $D=g_{ij};i,j \in V,i \neq j$  son los costos de transporte (distancias entre nodos). La matriz de costos  $D$  es simétrica y satisface la desigualdad triangular (sean  $a,b \in \mathbb{R}$  entonces se cumple que:  $|a+b| \leq |a| + |b|$ ). Un vehículo con capacidad  $Q$  tiene bienes para distribuir o coleccionar a sus consumidores o proveedores, de acuerdo con la demanda, minimizando la distancia (costo) total esperada y se tienen los siguientes supuestos:

1. La demanda de los consumidores o proveedores es una variable aleatoria  $x_i, i=1,\dots,n$  independiente e idénticamente distribuida, con una función de densidad de probabilidad conocida.

2. Existe una probabilidad de presencia-ausencia  $(p_i, 1-p_i)$  cada cliente (proveedor).
3. La demanda total de cada consumidor o proveedor es conocida con certeza solamente cuando el vehículo arriba a la locación del mismo.
4. La cantidad demandada de mercancía  $x_i$  de cada nodo no excede la capacidad del vehículo  $Q$ .  $x_i$  sigue una distribución discreta de probabilidad  $p_{ik} = \text{probabilidad}(x_i=k), k=0,1,\dots, k \leq Q$ .

Los tiempos de viaje pueden ser variables estocásticas independientes e idénticamente distribuidas [1].

## Tipos de problemas estocásticos

En la tabla 1 se detallan los tipos de modelos de ruteo con componentes estocásticos, sus principales características y las siglas que se utilizarán con el fin de visualizar la gran variedad presentada en la tipología de esta clase de formulaciones.

Tabla 1. Clasificación de problemas de ruteo de estocástico de vehículos

SIGLA	MODELO	CARACTERÍSTICAS
TSP	Travelling Salesman Problem (Problema del agente viajero).	1 vehículo, $n$ nodos a visitar. Objetivo: minimizar distancias.
m- TSP	Multiple Travelling Salesman Problem (Problema de los múltiples agentes viajeros).	$m$ vehículos, $n$ nodos a visitar. Objetivo: minimizar distancias.
PTSP	Probabilistic Travelling Salesman Problem (Problema probabilístico del agente viajero).	1 vehículo, $n$ nodos a visitar, cada uno con una probabilidad $p_i$ de ser visitado. Objetivo: minimizar distancias.
m- PTSP	Multiple Probabilistic Travelling Salesman Problem (Problema probabilístico de los múltiples agentes viajeros).	$m$ vehículos, $n$ nodos a visitar, cada uno con una probabilidad $p_i$ de ser visitado. Objetivo: minimizar distancias.
TSPST	Travelling Salesman Problem with Stochastic Time (Problema del agente viajero con tiempo estocástico).	1 vehículo, $n$ nodos a visitar, tiempos de recorrido que son variables estocásticas. Objetivo: minimizar el tiempo de recorrido total.
m- TSPST	Multiple Travelling Salesman Problem with Stochastic Time (Problema de los múltiples agentes viajeros con tiempo estocástico).	$m$ vehículos, $n$ nodos a visitar, tiempos de recorrido que son variables estocásticas. Objetivo: minimizar el tiempo de recorrido total.
VRP	Vehicle Routing Problem (Problema de ruteo de vehículos).	$m$ vehículos de capacidad idéntica, 1 depósito, demanda conocida asociada a los clientes. Objetivo: minimizar costos (distancia recorrida); restricciones de capacidad.
SVRP	Stochastic Vehicle Routing Problem (Problema estocástico de ruteo de vehículos).	Se trata de un problema de ruteo de vehículos, donde algún componente es aleatorio, y se presentan varios casos.
VRPSD	Vehicle Routing Problem with Stochastic Demand (Problema de ruteo de vehículos con demanda estocástica).	$m$ vehículos, 1 depósito, demanda aleatoria. Objetivo: minimizar costos (distancias); restricciones de capacidad, pues al no conocer la demanda, esta puede ser excedida durante el recorrido.

SIGLA	MODELO	CARACTERÍSTICAS
VRPSC	Vehicle Routing Problem with Stochastics Consumers (Problema de ruteo de vehículos con consumidores estocásticos).	$m$ vehículos, 1 depósito; demanda conocida; presencia de consumidores asociada a una probabilidad. Objetivo: minimizar costos (distancias).
VRPSDC	Vehicle Routing Problem with Stochastic Demand and Consumer (Problema de ruteo de vehículos con demanda y consumidores estocásticos).	$m$ vehículos, 1 depósito; demanda aleatoria; consumidores aleatorios. Objetivo: minimizar costos (distancias); restricciones de capacidad.
VRPSTT	Vehicle Routing Problem With Stochastics Travel Times (Problema de ruteo de vehículos con tiempos de viaje estocásticos).	$m$ vehículos, 1 depósito; demanda conocida; tiempos de viaje y/o servicios que son variables aleatorias. Objetivo: minimizar tiempos de viaje, restricciones de ventanas de tiempo.
Consistent VRPSC	Consistent Vehicle Routing Problem with Stochastics Consumers (Problema de ruteo de vehículos enfocado en el consumidor).	$m$ vehículos, 1 depósito, 1 conductor visitando los mismos clientes a la misma hora del día (enfocado al cliente); demanda conocida; planeación por periodos de tiempo. Objetivo: minimizar los tiempos de viaje en los periodos de planeación. Existe una probabilidad $p_i$ asociada al evento de que el cliente haga un pedido.
VRPSD-DC	The Vehicle Routing Problem with Stochastic Demand and Duration Constraints (Problema de ruteo de vehículos con demanda estocástica y restricciones de duración).	$m$ vehículos, 1 depósito; demanda estocástica. Objetivo: minimizar costos (distancias); restricciones de duración de las rutas.

Fuente: elaboración propia, basados en [2], [3], [4], [5].

## Origen de los modelos de ruteo de vehículos con componentes estocásticos

El problema de diseñar rutas para distribuir productos o servicios desde uno o varios depósitos a diferentes usuarios finales es uno de los más tratados dentro del campo de la investigación de operaciones. De manera unánime, los autores revisados plantean que la primera referencia del problema de ruteo de vehículos fue hecha por Dantzing y Ramser en 1959 [6]. En dicho trabajo seminal se aplican técnicas de programación lineal a la distribución de combustible, donde se encuentran soluciones óptimas de cuatro rutas para un problema de doce estaciones de servicio.

Los modelos denominados VRP surgen como una generalización del problema del agente viajero. Dicho problema fue tratado por Merrill [7], el cual aclara que quien propuso inicialmente este problema fue Hassler Whitney en un seminario en la Universidad de Princeton, en 1934. Merrill explica el problema, lo formula matemáticamente, propone soluciones y concluye acerca de las limitaciones para resolverlo,

por tratarse de un problema de naturaleza compleja y combinatoria [8].

El  $m$ -TSP surge como una generalización del TSP, en la cual se tiene un depósito y  $m$  vehículos. El objetivo de este modelo es construir exactamente  $m$  rutas, una para cada vehículo, de modo que cada cliente sea visitado una vez por uno de los vehículos. Cada ruta debe comenzar y finalizar en el depósito y puede contener a lo sumo  $p$  clientes [9]. El VRP es el  $m$ -TSP, en el que a cada cliente se le asocia una demanda y cada vehículo cuenta con cierta capacidad; por lo tanto, se puede afirmar que el problema del agente viajero es aquel que da origen al problema de ruteo [10].

No fue posible en la búsqueda bibliográfica ubicar el  $m$ -TSP dentro de una fecha específica y en relación con un autor, pero su origen puede ser posterior a la fecha de origen del TSP.

Como la pretensión de este artículo es identificar el origen y desarrollo de los modelos de ruteo con componentes aleatorios, se obviarán el surgimiento de otros modelos con diferentes características y especificaciones, acerca de los cuales existe una vasta literatura.

El PTSP fue propuesto por Jaillet [11], en su tesis doctoral del Instituto de Investigación de Operaciones de la Universidad de Cambridge, Massachusetts. En dicha tesis se expone el modelo, sus características y restricciones, además de desarrollar algunas heurísticas de solución basadas en los métodos de solución estándar del TSP; también propone un algoritmo exacto enumerativo [12]. El PTSP se refiere a un modelo especial de problema del agente viajero donde existe una probabilidad asociada a cada nodo (consumidor o punto de recolección) de presentarse (llamaremos  $p_i$  a dicha probabilidad) o no presentarse, la cual es el complemento; es decir:  $(1-p_i)$  puede ocurrir un caso homogéneo, donde todos los nodos tienen la misma probabilidad de estar disponibles. En el caso heterogéneo, por el contrario, los nodos tienen diferentes probabilidades de estar habilitados o no [5].

La referencia más temprana del VRP con algún componente estocástico se tiene en Tillman [13], donde se resolvió un modelo de rutas para una terminal de distribución múltiple con demandas probabilísticas. Aunque no puede afirmarse que se trata de un VRP, por lo menos es la primera referencia que se tiene con respecto a demandas que presentan cierto comportamiento de tipo aleatorio. Posteriormente, Stewart Jr. y Golden [14] proponen un trabajo que formula el modelo VRP con demandas estocásticas; es decir, dichas demandas son desconocidas, pero se ajustan a una función de distribución de probabilidad conocida.

En un estudio de Lambert, Laporte y Louveaux [15], se diseñan rutas para la recolección de dinero en diferentes sucursales bancarias, donde el tiempo del viaje es una variable estocástica. Existe, además, una restricción de tiempo, comúnmente llamada ventana de tiempo (*time window*), que consiste en penalizar la no recogida de dinero con el valor equivalente a la pérdida de un día de interés bancario [16].

En el año 1988, Bertsimas y Ryzin [17] presentan el modelo PVRP, en el que se considera un depósito y  $n$  locaciones, a las cuales se les asigna una probabilidad de presentarse, y la demanda asociada a cada nodo son variables enteras e independientes, cada una con distribuciones de probabilidad conocidas. En casos donde la demanda es desconocida, la estrategia de modelación es considerar la demanda incierta como una variable entera y determinista. En tal situación, se diseñan las rutas y se contempla una estrategia de optimización, conforme a la información que se va conociendo. No obstante, a medida que los sistemas y la informática se han

desarrollado, y esto ha permitido una mayor velocidad y capacidad de procesamiento de datos, los modelos VRP estocásticos se han tornado más complejos e involucran más variables y restricciones, que se ajustan con más detalle a la realidad de los sistemas de distribución y/o recogida [18].

En la revisión bibliográfica realizada se presenta mayor interés por otros modelos VRP que no incluyen aspectos aleatorios, debido, posiblemente, a la complejidad de modelamiento de los que sí incluyen componentes aleatorios. Sin embargo, entre los años noventa y la primera década del nuevo milenio, los modelos estocásticos han recibido una mayor atención y han surgido nuevas propuestas, las cuales se expondrán en las siguientes secciones. En 1991, Bertsimas y Ryzin [17], entre otros especialistas, analizan una serie de problemas de ruteo con demanda estocástica y dinámica. En este modelo, la demanda es aleatoria y sigue una función de densidad de probabilidad conocida, pero se tiene en cuenta el tiempo entre arribos a los puntos de demanda, los cuales son variables aleatorias de Poisson. El componente dinámico consiste en que los arribos ocurren secuencialmente dentro de un período de tiempo específico.

A continuación, se tratará la clasificación o subdivisión de los modelos de ruteo, según componentes estocásticos.

## Taxonomía de los modelos de ruteo de vehículos con componentes estocásticos

El problema de ruteo con componentes estocásticos tiene, básicamente, dos clases de variables aleatorias: variables aleatorias asociadas a la demanda y a la presencia-ausencia de puntos de consumo y variables asociadas a los tiempos de viaje y a las restricciones de duración de ruta. Para los problemas que trabajan como componente estocástico la demanda, existen tres tipos de modelos [18]:

1. Modelos que consideran que existe una probabilidad  $p_i$  asociada a la disponibilidad de los nodos (puntos de consumo o recolección). El complemento  $(1-p_i)$  es la probabilidad de no disponibilidad de los nodos. Estos modelos pueden ser homogéneos cuando las probabilidades de presencia-ausencia son iguales para todos los nodos. En caso contrario, se habla de un problema heterogéneo, pues las probabilidades son diferentes.
2. Modelos que consideran que la demanda es desconocida pero describible a través de una función

de densidad de probabilidad conocida. Generalmente, estas son variables discretas. También puede presentarse el caso homogéneo, donde todas las funciones de probabilidad son iguales para todos los clientes, y en caso contrario, se habla de un problema heterogéneo donde las funciones de densidad de probabilidad son diferentes.

3. Modelos que consideran simultáneamente demandas aleatorias y nodos probabilísticos, siendo estos últimos los más difíciles de solucionar.

La segunda clase de problemas que consideran aleatorio el tiempo de viaje, se clasifican en tres tipos [19]:

1. Tiempos de viaje aleatorios: el componente aleatorio lo aporta el tiempo de ruta.
2. Modelos con demanda aleatoria y restricciones de duración de ruta: el componente estocástico lo aporta la demanda, pero se ubicó en esta categoría dado que el tiempo se convierte en una restricción. Este tipo de problemas se presenta cuando existen limitaciones con respecto a la duración de las rutas, ya por mantenimiento de vías, ya por peso de la carga, o turnos de los conductores.

### Técnicas de solución para los problemas de ruteo de vehículos con componentes estocásticos

Diferentes paradigmas de modelamiento para el caso de VRP estocástico se han desarrollado hasta el momento [18]:

1. El primero consiste en la optimización en tiempo real, basada en el supuesto de que la información es conocida sobre el tiempo, es decir, en el momento en el que los vehículos están en

ruta. Para su solución se ha utilizado la programación dinámica y las rutas se trazan tramo a tramo, con base en la información disponible en el momento.

2. Un segundo paradigma es el de la optimización *a priori*, es decir, debe determinarse una solución de antemano, y dicha solución es evaluada en la ejecución de las variables estocásticas. Existen tres enfoques de modelación dentro de esta estrategia: i. Solución *a priori*, la cual será confrontada con la ejecución de los parámetros estocásticos en una segunda etapa, ii. Programación con cambio de restricciones y iii. Programación estocástica de dos etapas [20].
3. Para la solución de este tipo de modelos con componentes aleatorios se han planteado básicamente tres métodos: exactos, heurísticos y metaheurísticos [1].

Los métodos exactos se clasifican en métodos de ramificación y acotamiento (Branch and Bound), programación dinámica y programación lineal entera. Estos métodos pueden ser utilizados en el caso estocástico, aunque presentan el inconveniente de no ser eficaces en casos de más de cincuenta nodos [21]. Los heurísticos pueden ser clasificados en constructivos, de dos fases y métodos de mejora [22]. Las metaheurísticas, de relativa aparición posterior, utilizan algoritmos computacionales y desde diferentes métodos como: colonia de hormigas, algoritmos genéticos, búsqueda TABU, enjambre de abejas, recocido simulados, entre otras, utilizan reglas generales para solucionar aplicaciones particulares [22].

Ahora bien, la tabla 2 resume los principales tipos de problemas SVRP tratados y las estrategias de modelación y soluciones utilizadas, los autores que plantearon dichos trabajos, así como algunas observaciones que se consideran pertinentes al respecto.

Tabla 2. Técnicas de solución y autores

TIPO DE PROBLEMA	TÉCNICA DE SOLUCIÓN	AUTOR(ES)	OBSERVACIONES
SVRP	Heurísticas de ahorros.	Tillman [13]	Multidepósito.
SVRP	Heurísticas de ahorros.	Golden & Stewart [23]	Penalización igual a la suma de viajes de regreso. Programación restringida a cambios.
VRPSD	Heurísticas, correlación de demandas.	Golden & Yee [24]	Resultados teóricos. Programación restringida a cambios.
VRPSD	Programación dinámica.	Yee & Golden [25]	Viajes de retorno preventivos.
VRPSD	Extensiones de heurísticas de ahorros.	Stewart & Golden [26]	Programación restringida a cambios.

TIPO DE PROBLEMA	TÉCNICA DE SOLUCIÓN	AUTOR(ES)	OBSERVACIONES
VRPSD	Heurísticas y método de Lagrange.	Stewart [27]	Tesis Ph. D. Programación estocástica con recursos.
VRPSD	Continuación de Modelo, heurística de ahorros, método Lagrange.	Stewart, Golden & Gheysens [28]	Programación estocástica con recursos.
VRPSD	Modelo, heurística de ahorros, método Lagrange.	Stewart Jr. & Golden [14]	Programación restringida a cambios. Programación estocástica con recursos.
VRPSD	Transformación de SVRP en VRP determinístico.	Bodin, Golden, Assad & Ball [29]	Programación restringida a cambios.
PTSP	Heurísticas basadas en los métodos estándar de solución del TSP.	Jaillet [11]	Tesis doctoral. En este año se plantea el modelo Branch and Bound.
VRPSC	TPS basado en heurísticas descritas.	Jezequel [30]	Disertación de tesis de maestría. Noción de riesgo.
VRPSDC	Descripción de un TPS basado en heurísticas.	Jezequel [30]	Disertaciones de Tesis. No hay resultados de pruebas.
VRPSD	Heurísticas de ahorros.	Dror & Trudeau [31]	Programación restringida a cambios. Programación estocástica con recursos.
PTSP	Heurística del vecino más próximo y heurística de ahorros.	Rossi & Gavioli [32]	
VRPSDC	Clusterización de clientes con demandas no unitarias por agrupación de clientes con demandas Bernoulli.	Jaillet [33]	
PTSP	Heurísticas basadas en los métodos estándar de solución del TSP.	Bertsimas [34]	Tesis doctoral. Se realiza diseño, prueba y comparación de resultados.
VRPSC	Método clusterización de clientes, aplicando probabilidad Bernoulli.	Jaillet & Odoni [35]	
VRPSC	Heurísticas. Resultados asintóticos y heurísticas con ejecución del peor caso.	Bertsimas [34]	Tesis doctoral. Propiedades cotas.
VRPSDC	Método esquema branch and bound y varios métodos heurísticos.	Jaillet & Odoni [35]	
VRPSS	Algoritmo de relajación exacta de restricción, $n < 30$ . Modelo acotado de penalización.	Laporte, Louveaux & Mercure [36]	Localización variable del depósito. Programación restringida a cambios. Modelo acotado penalizado.
VRPSD	Programación estocástica con recursos, modelo Markoviano.	Dror, Laporte & Trudeau [37]	Propiedades.
VRPSD	Programación estocástica con recursos.	Waters [38]	Modelo propuesto.
VRPSD	Programación estocástica con recursos.	Laporte & Louveaux [39]	Modelo, límites, viajes de retorno preventivos.
VRPSD	Resultados asintóticos y heurísticas con ejecución del peor caso.	Bertsimas, Jaillet, & Odoni [40]	1 vehículo, demandas 0-1, propiedades.

TIPO DE PROBLEMA	TÉCNICA DE SOLUCIÓN	AUTOR(ES)	OBSERVACIONES
VRPSC	Método de solución <i>a priori</i> (priorización) óptima con la estrategia de reoptimización, con polinomio heurística del tiempo.	Bertsimas, Jaillet, & Odoni [40]	Estrategias de optimización <i>a priori</i> aplicadas a cuatro problemas: el TSP, el VRP, el MST y el TSFLP.
SVRP	Heurísticas para PTSP	Bertsimas, Chervit & Peterson [41]	
VRPSD	Programación estocástica con recursos, modelo Markoviano.	Dror [42]	Modelo.
VRPSD	Programación restringida a cambios, programación estocástica con recursos.	Bastian & Rinnooy [43]	Modelo: TSP-Dependiente del tiempo.
VRPSD	Resultados asintóticos y heurísticas con ejecución del peor caso.	Bertsimas [44]	Propiedades cotas, generalización.
VRPSCD	El VRPSCD es indirectamente direccionado dentro del contexto del IRPS (Inventory Routing Problem). El costo esperado del recurso es calculado bajo los supuestos de repartos divididos y distribuciones de demandas continuas.	Trudeau & Dror [42]	
VRPSCD	Comparación de muchas políticas de operación.	Benton & Rossetti [45]	
VRPSCD	Resultados asintóticos, cotas, propiedades. Fórmulas recursivas para el cálculo del costo esperado.	Bertsimas [44]	
VRPSTT	Algoritmo de ramificación y corte.	Laporte, Louveaux & Mercure [46]	Programación restringida. Modelamiento recursivo de 2 y 3 índices.
VRPSD	Algoritmos de ahorros, entregas divididas.	Bouzaiene, Dror & Laporte [47]	
VRPSD	Heurísticas y algoritmos exactos.	Dror, Laporte & Louveaux [48]	Restricciones de fallas, modelos, programación restringida a cambios, programación estocástica con recursos.
PSTP	Algoritmo entero exacto en forma de L.	Laporte, Louveaux, & Mercure [49]	Se plantea el modelo y funciona hasta 50 nodos.
VRPSD	Algoritmo exacto y entero en forma de L para casos discretos, $n < 70$ .	Séguin [50]	Tesis doctoral. Programación estocástica con recursos.
VRPSCD	Algoritmo exacto usando el método del entero en forma de L ( $n \leq 46$ ). Búsqueda Tabú.	Séguin [50]	Tesis doctoral. Modelo, límites y características.
VRPSD	Programación estocástica con recursos.	Gendreau, Laporte & Seguin [51]	Extraído de Séguin (1994).
VRPSCD	Algoritmo exacto del entero en forma de L.	Gendreau, Laporte & Seguin [51]	Extraído de Séguin (1994).
VRPSCD	Búsqueda Tabú	Gendreau, Laporte, & Séguin [52]	Se realizaron comparaciones con métodos exactos conocidos en problemas de tamaño 6 a 46 nodos. Los resultados indican que la heurística produce soluciones óptimas en el 89,45 % de los casos.

TIPO DE PROBLEMA	TÉCNICA DE SOLUCIÓN	AUTOR(ES)	OBSERVACIONES
SVRP	Método del entero en forma de L.	Laporte & Louveaux [53]	Comparación entre varios métodos y se muestran resultados.
VRPSD	Heurísticas.	Yang, Mathur & Ballou [54]	Estrategia de reabastecimiento.
VRPSD	Programación Neuro-dinámica.	Secomandi [55]	La secuencia de vehículos es dinámica.
VRPSD	Programación dinámica.	Christiansen & Lysgaard [56]	Enfoque de generación de una columna.
VRPSD	Algoritmos evolutivos.	Tan <i>et al.</i> [4]	Problemas multiobjetivo.
VRPSD	Algoritmo híbrido (ramificación local y método Montecarlo).	Rei, Gendreau & Soriano [57]	Para un solo vehículo.
VRPSD-DC	Búsqueda Tabú.	Elera, Morales, & Savelsbergh [58]	Modelo con restricciones de duración.

Fuente: elaboración propia, basados en [12], [2], [9], [59], [60].

## CONCLUSIONES

Dentro de los casos estocásticos, el que ha recibido menos atención es el que contempla tiempos de viaje y/o de servicio aleatorios. Aquí existe un campo para la propuesta de modelos con estas características. También se denota poca literatura con respecto a modelos VRP estocásticos con ventanas de tiempo o restricciones de duración de ruta. En cuanto a los métodos de solución, todavía existen diversos métodos heurísticos utilizados en casos deterministas, que podrían ser utilizados en el caso estocástico para comparar resultados de ejecución. El avance tecnológico permite plantear modelos con información más cercana a la realidad de los sistemas de distribución o recogida.

## REFERENCIAS

- [1] L. Bianchi *et al.*, “Hybrid Metaheuristics for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands”, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, vol. 5, no. 1, pp. 91-110, 2005.
- [2] M. Gendreau, Recent advances in stochastic vehicle routing, 2010.
- [3] B. Golden & A. Assad, “Perspectives on vehicle routing: exciting new developments”, *Operations Research*, vol. 34, no. 5, pp. 803 - 810, 1986.
- [4] K. Tan, C. Cheong & C. Goh, “Solving multiobjective vehicle routing problem with stochastic demand via evolutionary computation”, *European Journal of Operational Research*, vol. 177, no. 2, pp. 813 - 839, 2007.
- [5] P. Toth & D. Vigo, *The vehicle routing problem*. Philadelphia, Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [6] B. Golden *et al.*, *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*, 2008.
- [7] F. Merrill, “The traveling-salesman problem”, *Operations Research*, no. 1, pp. 61 - 75, 1996.
- [8] V. Yepes, *Optimización heurística económica aplicada a las redes de transporte del tipo VRPTW*, tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2002.
- [9] E. Gonzalez-L, W. Adarme-J & J. Orjuela-C, “Modelo matemático estocástico para el problema de ruteo de vehículos en la recolección de productos perecederos”, *DYNA*, vol. 82, no. 189, pp. 199 - 206, 2015.
- [10] M. Córdova *et al.*, *La integración de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) como estrategias de innovación pedagógica en el proceso de enseñanza aprendizaje en las asignaturas básicas impartidas en los centros de educación formal Fe y Alegría San Jose Pla*. San Salvador, 2013. Disponible: [http://ri.ues.edu.sv/4578/1/La\\_integración\\_de\\_las\\_tecnologías.pdf](http://ri.ues.edu.sv/4578/1/La_integración_de_las_tecnologías.pdf)

- [11] P. Jaillet, *Probabilistic traveling salesman problems, tesis doctoral*, Massachusetts Institute of Technology, 1985.
- [12] M. Gendreau, “A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with stochastic demands and customers”, *Operations Research*, vol. 44, no. 3, pp. 469 - 477, 1996.
- [13] F. Tillman, “The multiple terminal delivery problem with probabilistic demands”, *Transportation Science*, no. 3, pp. 192-204, 1969.
- [14] W. R. Stewart JR & B. Golden, “Stochastic vehicle routing: A comprehensive approach”, *European Journal of Operational Research*, vol. 14, no. 4, pp. 371 - 385, 1983.
- [15] V. Lambert, “Designing collection routes through bank branches”, *Computer & Operations Research*, no. 20, pp. 783 - 791, 1993.
- [16] H. Lei *et al.*, “The capacitated vehicle routing problem with stochastic demands and time windows”, *Computers & Operations Research*, vol. 38, no. 12, pp. 1775 - 1783, 2011.
- [17] D. Bertsimas & G. Ryzin, “Stochastic and dynamic vehicle routing with general demand and interarrival time distributions”, *Applied Probability Trust*, vol. 25, no. 25, pp. 947 - 978, 1993.
- [18] M. Gendreau, *Recent Advances in Stochastic Vehicle Routing*, 2010b.
- [19] M. Gendreau, *An Adaptive Large Neighborhood Search for a Vehicle Routing Problem with Multiple Trips*, 2010a.
- [20] N. Azi *et al.*, “An exact algorithm for a vehicle routing problem with time windows and multiple use of vehicles”, *European Journal of Operational Research*, vol. 202, no. 3, pp. 756 - 763, 2010.
- [21] L. C. Coelho, “The exact solution of several classes of inventory-routing problems”, *Computers & Operations Research*, vol. 40, no. 2, pp. 558-565, 2013.
- [22] L. B. Rocha *et al.*, “Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: evolución histórica y métodos de solución”, *Ingeniería*, vol. 16, no. 2, pp. 35-55, 2011.
- [23] B. Golden & W. Stewart, “Vehicle routing with probabilistic demands”, *Computer Science and Statistics Tenth Annual Symposium on the Interface*, D. Hoyben and D. Fife, Eds. *NBS Special Publication 503, National Bureau of Standards: Washington, D.C.*, pp. 252 - 259, 1978.
- [24] B. Golden & J. Yee, “A framework for probabilistic vehicle routing”, *AIEE Transact*, vol. 11, no. 2, pp. 109 - 112, 1979.
- [25] J. Yee & B. Golden, “A note on determining operating strategies for probabilistic vehicle routing”, *Naval Research Logistics*, no. 27, pp. 159 - 163, 1980.
- [26] W. Stewart & B. Golden, “A chance-constrained approach to the stochastic vehicle routing problem”, In G. Boseman, J. Vora. *Proceedings of 1980 Northeast AIDS Conference: Philadelphia*, pp. 33 - 35, 1980.
- [27] W. Stewart, *New algorithm for deterministic and stochastic vehicle routing problem, Tesis Post Doctoral Report No. 81 - 009*, University of Maryland at College Park, MD, 1981.
- [28] W. Stewart *et al.*, “A survey of stochastic vehicle routing”, *IEEE*, pp. 229 - 232, 1982.
- [29] L. Bodin *et al.*, “Routing and scheduling of vehicles and crews. The state of the art”, *Computers & Operations Research*, vol. 10, no. 2, pp. 63 - 211, 1983.
- [30] A. Jezequel, *Probabilistic vehicle routing problems, Tesis de maestría*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1985.
- [31] M. Dror & P. Trudeau, “Stochastic vehicle routing with modified savings algorithm”, *European Journal of Operational Research*, vol. 23, no. 2, pp. 228 - 235, 1986.
- [32] F. Rossi & I. Gavioli, “Aspects of heuristic method in the probabilistic traveling salesman problem”, In *Advanced School on Stochastics in Combinatorial Optimization*, G. Andreatta, F. Mason and P. Serafini, Eds. *World Scientific Publisher: Singapore*, pp. 214-227, 1987.
- [33] P. Jaillet, “A priori solution of a traveling salesman problem in which a random subset of the customers are visit-

- ed”, *Operations Research*, vol. 36, no. 6, pp. 929 - 936, 1987.
- [34] D. Bertsimas, *Probabilistic combinatorial optimization problems*, Tesis doctoral, Massachusetts Institute of Technology, 1988.
- [35] P. Jaillet & A. Odoni, “The probabilistic vehicle routing problem”, In *Vehicle Routing; Methods and Studies*, B.L. Golden and A. A. Assad, Eds. North Holland: Amsterdam, 1988.
- [36] G. Laporte *et al.*, “Models and exact solutions for a class of stochastic location-routing problems”, *European Journal of Operational Research*, vol. 39, no. 1, pp. 71 - 78, 1989.
- [37] M. Dror *et al.*, “Vehicle routing with stochastic Demands: properties and solution frameworks”, *Transportation Science*, vol. 23, no. 3, pp. 166 - 177, 1989.
- [38] C. Waters, “Vehicle-scheduling problems with uncertainty and omitted customers”, *Operational Research Society*, vol. 40, no. 12, pp. 1099 - 1100, 1989.
- [39] G. Laporte & F. Louveaux, “Formulations and bounds for the stochastic capacitated vehicle routing problem with uncertain supplies”. *Economic Decision-Making Games, Economics and Optimisation*, Ch, Elsevier Science Publ. B. V., pp. 443 - 455, 1990.
- [40] D. Bertsimas *et al.*, “A priori optimization”, *Operations Research*, vol. 38, no.6, pp. 1019 - 1033, 1990.
- [41] D. Bertsimas *et al.*, “Computational approaches to stochastic vehicle routing problems”, WP# 3285-91-MSA, pp. 1 - 35, 1991.
- [42] P. Trudeau & M. Dror, “Stochastic inventory routing: route desing with stockouts and route failures”, *Transportation Science*, vol. 26, no. 3, pp. 171 - 184, 1992.
- [43] C. Bastian & A. Rinnooy, “The stochastic vehicle routing problem revisited”, *European Journal of Operational Research*, vol. 56, no. 3, pp. 407 - 412, 1992.
- [44] D. Bertsimas, “A vehicle routing problem with stochastic demand”, *Operations Research*, vol. 40, no. 3, pp. 574 - 585, 1992.
- [45] W. Benton & M. Rossetti, “The vehicle scheduling problem with intermittent customer demands”, *Computers & Operations Research*, vol. 19, no. 6, pp. 521 - 531, 1992.
- [46] G. Laporte *et al.*, “The vehicle routing problem with stochastic travel times”, *Transportation Science*, vol. 26, no. 3, pp. 161 - 170, 1992.
- [47] B. Bouzaiene, “Vehicle routing with stochastic demands and split deliveries”, *Foundations of Computing and Decision Sciences*, vol. 18, no. 1, 1993.
- [48] M. Dror *et al.*, “Vehicle routing with stochastic demands and restricted failures”, *Methods and Models Od Operations Research*, no. 37, pp. 273-283, 1993.
- [49] G. Laporte *et al.* “A priori optimization of the probabilistic traveling salesman roblem”, *Operations Research*, vol. 42, no. 3, pp. 543 - 549, 1994.
- [50] R. Séguin, *Problèmes stochastiques de tournées de véhicules*, Tesis doctoral, Université de Montréal, 1994.
- [51] M. Gendreau *et al.*, “An exact algorithm for the vehicle routing problem with stochastic customers and demands”, *Transportation Science*, vol. 29, no. 2, pp. 143 - 155, 1995.
- [52] M. Gendreau, “Stochastic vehicle routing”, *European Journal of Operational Research*, vol. 88, no. 6, pp. 13 - 22, January, 1996.
- [53] G. Laporte & F. Louveaux, “Solving stochastic routing problems with the integer L-Shaped method”, *Fleet Management and Logistics*, pp. 159-167, 1998.
- [54] W. Yang *et al.*, “Stochastic vehicle routing problem with restocking”, *Transportation Science INFORMS*, vol. 34, no. 1, pp. 99 - 112, 2000.
- [55] N. Secomandi, “A rollout policy for the vehicle routing problem with stochastic demands”, *Operations Research INFORMS*, vol. 49, no. 5, pp. 796 - 802, 2001.
- [56] C. Christiansen & J. Lysgaard, “A branch-and-price algorithm for the capacitated vehicle routing problem with stochastic demands”,

- Operations Research Letters*, no. 35, pp. 773 - 781, 2007.
- [57] W. Rei *et al.*, “A hybrid Monte Carlo local branching algorithm for the single vehicle routing problem with stochastic demands”, *Transportation Science*, vol. 44, no. 1, pp. 136 - 146, 2010.
- [58] A. Erera *et al.*, “The vehicle routing problem with stochastic demand and duration constraints”, *Transportation Science*, vol. 44, no. 4, pp. 474 - 492, 2010.
- [59] V. Pillac *et al.*, “A review of dynamic vehicle routing problems”, *European Journal of Operational Research*, vol. 225, no. 1, 1 - 11, 2013.
- [60] M. Wen *et al.*, The dynamic multi-period vehicle routing problem, *Computers & Operations Research*, vol. 37, no. 9, pp. 1615 - 1623, 2010.